|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Questionnaire**  **examen final**  **MTH6415**  **Sigle du cours** |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Identification de l’étudiant(e)*** | | | | | | | | | |
| **Nom :** | | | | | **Prénom :** | | | | |
| **Signature :** | | | | | **Matricule :** | | | | **Groupe :** |
|  | | | | | | | | | |
| ***Sigle et titre du cours*** | | | | ***Groupe*** | | | | ***Trimestre*** | |
| **MTH6415**  **Optimisation stochastique** | | | | **TOUS** | | | | **HIVER 2016** | |
| ***Professeur*** | | | | ***Local*** | | | | ***Téléphone*** | |
| **Michel GENDREAU** | | | | **C-539-4** | | | | **4513** | |
| ***Jour*** | | ***Date*** | | | | ***Durée*** | | ***Heures*** | |
| **Jeudi** | | **28 avril 2016** | | | | **2h30** | | **9h30 à 12h00** | |
| ***Documentation*** | | | ***Calculatrice*** | | | | | | |
| Aucune | | | Aucune | | | | **Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.** | | |
| Toute | | | Toutes | | | |  | | |
| Voir directives particulières | | | Non programmable | | | |  | | |
| ***Directives particulières*** | | | | | | | | | |
| * **Barème : 100 (40% de la note finale du cours)**   *Bonne chance à tous!* | | | | | | | | | |
| ***Important*** | Cet examen contient **x5** questions sur un total de **x3**  pages  **(excluant cette page)** | | | | | | | | |
|  | La pondération de cet examen est de **40**  **%** | | | | | | | | |
|  | Vous devez répondre sur :  le questionnaire  le cahier  les deux | | | | | | | | |
|  | Vous devez remettre le questionnaire :  oui  non | | | | | | | | |

**L’étudiant doit honorer l’engagement pris lors de la signature du code de conduite**.

**Problème #1** (15 points)

On considère un programme dynamique en horizon infini dans lequel l’ensemble des états est *X*= {1, 2). L’ensemble des décisions admissibles pour ces deux états est identique; il est dénoté *U* = {*u*1, *u*2}. Les matrices de transition associées aux décisions *u*1 et *u*2 sont respectivement

et .

Les coûts associés à *u*1 et *u*2 sont donnés par les vecteurs

et .

On souhaite minimiser le coût espéré total actualisé sur horizon infini**.** Le facteur d’actualisation est

1. À partir du vecteur initial exécuter une itération de la méthode d’itération de valeurs.
2. En appliquant la méthode d’itération de politiques à partir de la politique, déterminer la politique optimale *µ\** et le vecteur de coût espéré optimal *J\**.
3. Pouvait-on déterminer a priori une borne supérieure sur le nombre d’itérations qui seraient nécessaires pour trouver *µ\**? Si oui, pourquoi et quelle était cette borne?

**Problème #2** (25 points)

Tom Léveillé, un touriste intrépide a décidé d’aller visiter la Tatarie Inférieure, une région très peu connue de l’ex-URSS. Alors qu’il prépare son voyage Tom se rend compte qu’il est très difficile de se ravitailler en essence dans cette région. En fait, seules quelques villes possèdent des postes d’essence. Durant son voyage, Tom qui amorcera son périple à Oulan-Nulpar, la capitale de la Tatarie Inférieure, visitera successivement les villes ***V*1**à ***V*9** (je vous évite les noms!) pour finalement revenir à Oulan-Nulpar et rendre sa voiture de location. Grâce à des informations très détaillées sur les sites à visiter durant chaque étape, Tom a pu estimer très précisément sa consommation d’essence pour chacune de celles-ci. Ainsi pour aller de la ville ***Vi*** à la ville ***Vi+*1**, sa consommation sera de ***qi*** litres (notes : Oulan-Nulpar correspond à la ville ***V*0** et ***q*9** est la consommation pour le retour de ***V*9** à Oulan-Nulpar). Malheureusement, il possède beaucoup moins d’informations sur les prix pratiqués dans chaque ville et doit donc supposer que le prix ***Pi*** qu’il devra payer dans la ville ***Vi*** suit une loi uniforme (continue) sur un intervalle [***ai***, ***bi***] (encore ici, les prix à Oulan-Nulpar sont dans l’intervalle [***a*0**, ***b*0**]). Le réservoir de la voiture de Tom est d’une capacité de ***Q*** litres. La voiture de location de Tom lui est fournie au départ avec un réservoir plein et il doit la rendre avec un réservoir plein à l’agence de location à son retour à Oulan-Nulpar.

Remarques importantes :

* Tom pourra toujours observer le prix auquel l’essence sera vendue dans la ville où il se trouvera (il n’est pas aveugle!).
* On peut supposer que les prix pratiqués dans les différentes villes sont des variables aléatoires indépendantes.
* On suppose que ***Q*** et les ***qi***, ***i*** = 0,…, 9, sont des entiers positifs avec ***qi*** < ***Q*** pour tout ***i***.

1. (15 points) Sachant que Tom ne doit jamais tomber en panne durant son voyage, formuler un modèle de programmation dynamique qui permettra à celui-ci de minimiser l'espérance du coût total de l’essence qu’il devra acheter durant son périple en Tatarie Inférieure. Préciser très clairement tous les éléments du modèle.
2. (10 points) Supposons maintenant que Tom ne puisse estimer tout à fait précisément sa consommation d’essence. Faisons, par exemple, l’hypothèse que, pour chaque ***i*** = 0,…9, la consommation ***qi*** suive une loi continue (discrète) sur l’intervalle [***ci***, ***di***], avec ***di*** < ***Q***. Comment faudrait-il modifier le modèle précédent pour aider Tom, en n’oubliant pas qu’il ne doit jamais tomber en panne?

**Problème #3** (10 points)

On considère un programme stochastique en deux étapes dont le domaine réalisable de 1ère étape est et le domaine réalisable de seconde étape est

.

Déterminer si :

(a) suit une loi uniforme continue sur [1, 2]; (b) suit une loi de Poisson de moyenne 2.

**Problème #4** (10 points)

On considère un programme stochastique en deux étapes dont le domaine réalisable de 1ère étape est Pour la seconde étape, on a deux scénarios équiprobables. Le domaine réalisable pour le premier scénario est

et celui pour le second scénario est

On veut minimiser la fonction objectif

1. Trouver la solution optimale de ce problème (il suffit d’énumérer les solutions réalisables du problème de première étape).
2. Calculer la valeur de l'information parfaite et celle de la solution stochastique.

**Problème #5** (40 points)

Un restaurateur spécialisé dans les fruits de mer doit décider des quantités de divers coquillages, crustacés et poissons qu'il doit acheter pour préparer différents plats offerts par son établissement. Soit *I* l'ensemble de ces succulents produits de la mer; on dénote par le coût par kg du produit . Les quantités disponibles de chaque produit sont, à toutes fins pratiques, illimitées.

Notre restaurateur doit également décider des quantités à préparer de chaque plat pour la journée du lendemain, bien qu'il ne sache pas encore quelle sera la demande pour ceux-ci. Soit *J* l'ensemble des plats offerts. Pour chaque plat , on connaît la quantité du produit *i* qui entre dans sa composition (par portion), ainsi que le prix auquel il est vendu (également par portion). En ce qui concerne les demandes, on peut supposer que le nombre demandé de portions du produit *j* suit une loi uniforme sur les entiers sur l'intervalle []. Pour simplifier les choses, on supposera que les demandes pour les différents plats sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. De plus, si un client demande un plat qui est disponible, il lui sera toujours vendu. Par ailleurs, s'il reste des quantités invendues d'un plat donné, on pourra les recycler le jour suivant dans la fameuse chaudrée de fruits de mer du patron. On considère que la valeur qu'on peut associer à une portion du plat *j* ainsi recyclée est égale à .

1. (20 points) Proposer un modèle de programmation stochastique qui permettra à notre restaurateur de maximiser l'espérance de sa marge brute (valeur des plats vendus et recyclés – coût des produits). Préciser clairement tous les éléments du modèle.
2. (10 points) Comment peut-on qualifier ce modèle? De quelles propriétés intéressantes dispose-t-il?
3. (10 points) Si on pouvait stocker une partie des plats produits invendus et les vendre le surlendemain, cela compliquerait-il énormément le modèle? Pourquoi?

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**